Ecuaciones Diferenciales I

Examen XV

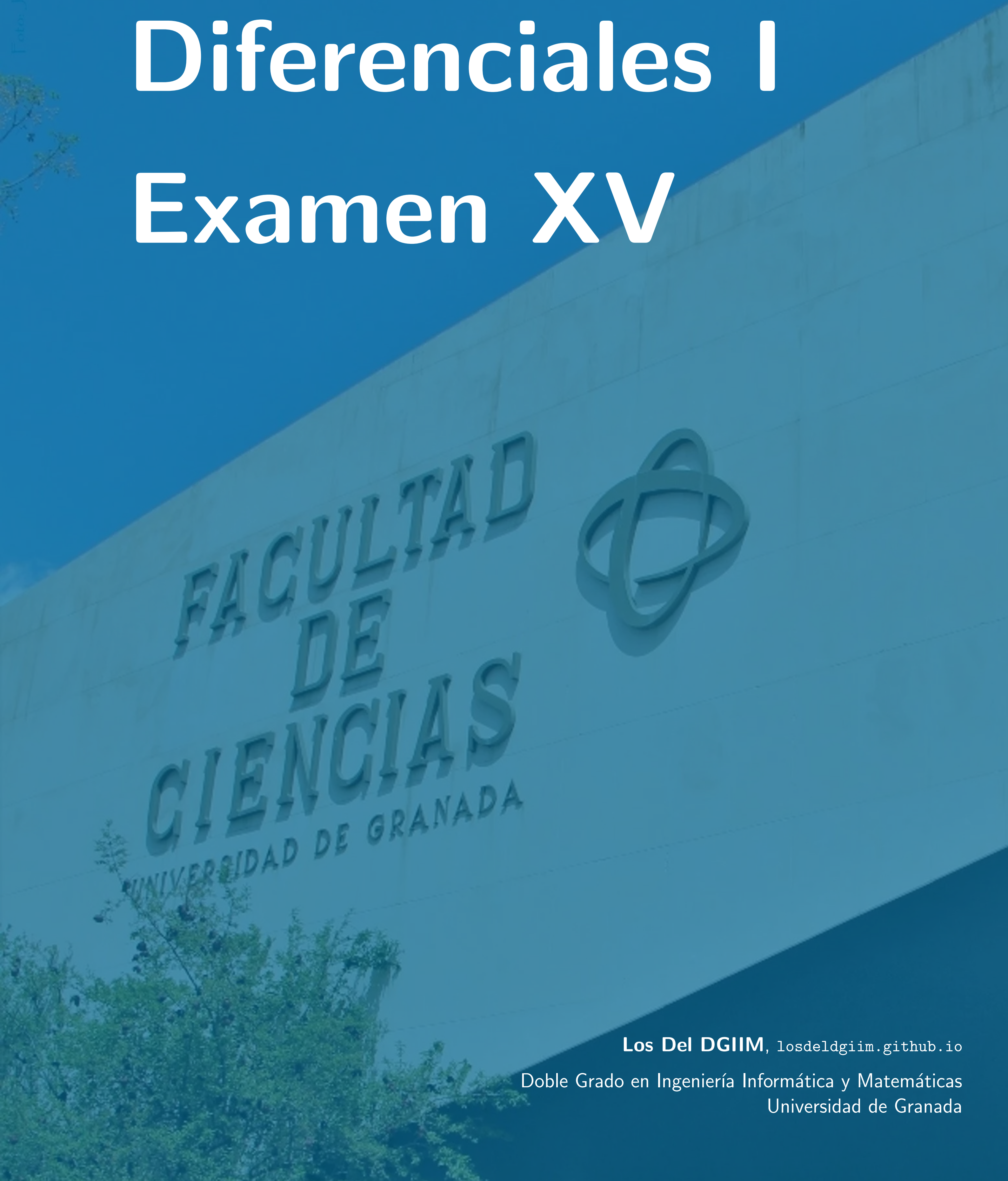


Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I Examen XV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Parcial 1.

Fecha 29 de Octubre de 2024.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1. En el plano con coordenadas (A, B) se considera la ecuación

$$A^3 - \cos(AB) = 0.$$

¿Es posible encontrar una función $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $B \mapsto \varphi(B)$ con $\varphi(0) = 1$ y de manera que se cumpla la ecuación para cada (A, B) con $A = \varphi(B)$, $B \in I$?

$I =]-\delta, \delta[$ para algún $\delta > 0$.

En este caso, B es la variable independiente y A es la variable dependiente. Necesitamos que:

$$\varphi(0) = 1 \Longrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = 1 \end{cases}$$

Definimos la función:

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (B, A) & \longmapsto & A^3 - \cos(AB) \end{array}$$

Buscamos aplicar el Teorema de la Función Implícita a F en el punto $(0, 1)$. Comprobamos en primer lugar que el punto es solución de la ecuación:

$$F(0, 1) = 1^3 - \cos(0 \cdot 1) = 1 - 1 = 0$$

Comprobamos ahora que F es de clase C^1:

$$\frac{\partial F}{\partial B} = A \operatorname{sen}(AB) \qquad \frac{\partial F}{\partial A} = 3A^2 + B \operatorname{sen}(AB)$$

Como ambas derivadas parciales son continuas, $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Además, vemos que la derivada parcial de F respecto de A (la variable dependiente) en el punto $(0, 1)$ no se anula:

$$\frac{\partial F}{\partial A}(0, 1) = 3 \cdot 1^2 + 0 \cdot \operatorname{sen}(0 \cdot 1) = 3 \neq 0$$

Aplicando el Teorema de la Función Implícita a F en el punto $(0, 1)$, obtenemos que la ecuación $F(B, A) = 0$ define una función implícita

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & B & \longmapsto & \varphi(B) \end{array}$$

dofinida en un entorno I de 0 y tal que $\varphi(0) = 1$. Definiendo $A = \varphi(B)$, tenemos que dicha función cumple:

$$F(B, A) = F(B, \varphi(B)) = 0 \qquad \forall B \in I$$

Ejercicio 2. Se considera la familia uniparamétrica de curvas

$$y = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Encuentra la familia de trayectorias ortogonales y dibuja las dos familias en un plano común con coordenadas (x, y).

Derivamos implícitamente dicha familia de curvas para obtener una ecuación diferencial de la cual sean solución:

$$1 \cdot y' = \frac{2x}{2} \Longrightarrow y' = x$$

Por tanto, la familia dada son soluciones de la ecuación diferencial siguiente:

$$y' = x \qquad \text{con dominio } D = \mathbb{R}^2$$

Usando que el producto de las pendientes de rectas perpendiculares es -1, y la interpretación geométrica de la derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, obtenemos que las trayectorias ortogonales a la familia dada son soluciones de la ecuación diferencial:

$$y' = -\frac{1}{x} \qquad \text{con dominio } D = \begin{cases} D_- &= \mathbb{R}^- \times \mathbb{R} \\ D_+ &= \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \end{cases}$$

Resolvemos ahora dicha ecuación diferencial, que es un cálculo de primitivas:

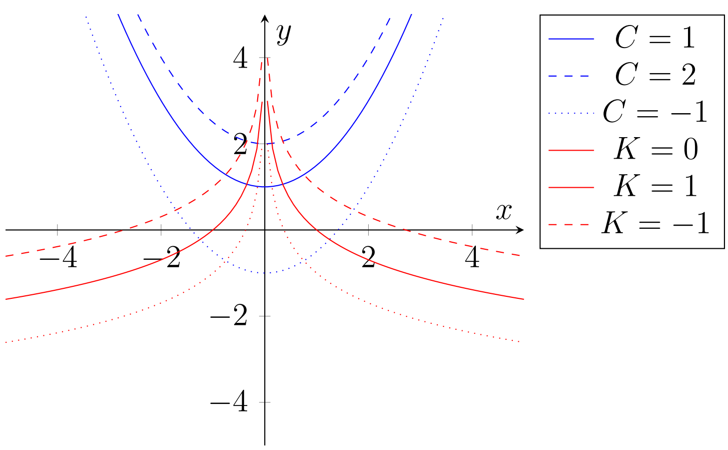
$$y(x) = \int -\frac{1}{x}dx = -\ln|x| + K \qquad K \in \mathbb{R}$$

donde $|x|$ será x o $-x$ en función del dominio. Tenemos por tanto que la familia de trayectorias ortogonales a la dada son:

- $\underline{D = D_-}$: $y(x) = -\ln(-x) + K \qquad \forall x \in \mathbb{R}^-,\ K \in \mathbb{R}$
- $\underline{D = D_+}$: $y(x) = -\ln(x) + K \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+,\ K \in \mathbb{R}$

Buscamos ahora dibujar ambas familias.

- La familia dada son parábolas convexas con vértice en el punto $(0, c)$ y eje de simetría en la recta $x = 0$. Las pintaremos en azul.
- Las trayectorias ortogonales son $y(x) = -\ln|x|$ desplazadas verticalmente. Las pintaremos en rojo.



Ejercicio 3. Encuentra la solución del problema de valores iniciales

$$x' = \frac{1+x^2}{1+t^2}, \quad x(0) = 1.$$

¿En qué intervalo está definida?

El dominio de la ecuación diferencial es $\mathbb{R}^2$. Se trata de una ecuación de variables separadas sin soluciones constantes, ya que:

$$1 + x^2 = 0 \qquad \text{no tiene solución en } \mathbb{R}$$

Por tanto, podemos separar variables y resolver la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{dt}{1+t^2} &\Longrightarrow \int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{dt}{1+t^2} \\ &\Longrightarrow \arctan x = \arctan t + C \qquad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Aplicamos ahora la condición inicial $x(0) = 1$:

$$\arctan 1 = \arctan 0 + C \Longrightarrow \frac{\pi}{4} = 0 + C \Longrightarrow C = \frac{\pi}{4}$$

Como la inversa de la arctan es la rama principal de la tangente, obtenemos que la solución del problema de valores iniciales es:

$$x(t) = \tan\left(\arctan t + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$$

donde $I \subset \mathbb{R}$ es el intervalo en el que la solución está definida. Para determinar dicho intervalo, como $\arctan(x) = \arctan(t) + \pi/4 \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$, tenemos que:

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan(t) + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow -\frac{3\pi}{4} < \arctan(t) < \frac{\pi}{4}$$

Resolvemos ambas desigualdades por separado para obtener I:

- Por un lado, tenemos que:

  $$-\frac{3\pi}{4} < -\frac{\pi}{2} < \arctan(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

  Por tanto, esta desigualdad no restringe el intervalo.

- Por otro lado, tenemos:

  $$\arctan(t) < \frac{\pi}{4}$$

  Usando que la rama principal de la tangente es creciente, obtenemos que:

  $$t < \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

  Por tanto, tenemos $t < 1$.

Por tanto, el intervalo de definición de la solución es:

$$I =]-\infty, 1[$$

Ejercicio 4. Se considera la transformación

$$\varphi : D \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t, x) = (e^t x, \arctan x),$$

donde $D = \mathbb{R} \times]0, \infty[$. Se pide:

1. Describe el conjunto $D_1 = \varphi(D)$ y prueba que φ es un difeomorfismo entre D y D_1.

   Tenemos que la transformación en cuestión es:

$$\begin{array}{rccl} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (t, x) & \longmapsto & (s, y) = (e^t x, \arctan x) \end{array}$$

   Sea $D_1 = \mathbb{R}^+ \times]0, \pi/2[$. Probaremos que $D_1 = \varphi(D)$ por doble inclusión:

   $\subset$) Sea $(s, y) \in D_1$, y para ver que $(s, y) \in \varphi(D)$, necesitamos encontrar $(t, x) \in D$ tal que $\varphi(t, x) = (s, y)$. Definimos:

$$t = \ln\left(\frac{s}{\tan y}\right) \qquad x = \tan y$$

   Veamos que estos valores están bien definidos y que $(t, x) \in D$:

   - Como $y \in]0, \pi/2[$, tenemos que $x = \tan y$ está bien definido y $x = \tan y > 0$.
   - Como $\tan y > 0$, tenemos que el denominador no se anula y es siempre positivo. Además, como $s > 0$, tenemos que el cociente es positivo, luego $t = \ln\left(\frac{s}{\tan y}\right)$ está bien definido.

   Por tanto, tenemos $(t, x) \in D$. Comprobemos que $\varphi(t, x) = (s, y)$:

$$\begin{aligned} \varphi(t, x) &= (e^t x, \arctan x) \\ &= (e^{\ln\left(\frac{s}{\tan y}\right)} \tan y, \arctan \tan y) \\ &= \left(\frac{s}{\tan y} \cdot \tan y, \arctan(\tan y)\right) \\ &\overset{(*)}{=} (s, y) \end{aligned}$$

   donde en $(*)$ hemos usado que, como $y \in]-\pi/2, \pi/2[$, tenemos que $\arctan(\tan y) = y$.

   $\supset$) Sea $(s, y) \in \varphi(D)$, por lo que $\exists (t, x) \in D$ tal que $\varphi(t, x) = (s, y)$. Por tanto, tenemos:

$$\begin{cases} s = e^t x \\ y = \arctan x \end{cases}$$

   Veamos que $(s, y) \in D_1$:

- Como $x \in \mathbb{R}^+$ y $e^t > 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, tenemos que $s = e^t x > 0$.
- Como $x > 0$, usando que arctan es creciente en $\mathbb{R}$, tenemos que $y = \arctan x > \arctan 0 = 0$. Además, por la definición de arctan, tenemos que $y = \arctan x < \pi/2$. Por tanto, $y \in]0, \pi/2[$.

Por tanto, $(s, y) \in D_1$.

Veamos ahora que se trata de un difeomorfismo. En primer lugar, como $D_1 = \varphi(D)$, tenemos que la restricción que consideramos es sobreyectiva. Además, como φ_2 es inyectiva, tenemos que φ es inyectiva. Por tanto, φ es biyectiva, con inversa:

$$\begin{array}{rccl} \varphi^{-1} = ((\varphi^{-1})_1, (\varphi^{-1})_2): & D_1 & \longrightarrow & D \\ & (s, y) & \longmapsto & (t, x) = \left(\ln\left(\dfrac{s}{\tan y}\right), \tan y\right) \end{array}$$

Además, tenemos que φ y φ^{-1} son de clase 1 en sus respectivos dominios por serlo cada una de las componentes. Por tanto, φ es un difeomorfismo entre D y D_1.

2. Dada una ecuación $x' = f(t, x)$ con $f : D \to \mathbb{R}$, ¿qué condiciones hay que imponer para que se pueda asegurar que el cambio $(s, y) = \varphi(t, x)$ es admisible?

   Para que el cambio de variable sea admisible, necesitamos en primer que φ sea un difeomorfismo entre D y D_1, algo que ya hemos probado en el apartado anterior. La condición de admisibilidad es:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} f(t, x) \neq 0 \qquad \forall (t, x) \in D$$

   En nuestro caso, tenemos:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = e^t x \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = e^t$$

   Por tanto, aparte de imponer que f sea continua en D, necesitamos que:

$$e^t x + e^t f(t, x) \neq 0 \iff x + f(t, x) \neq 0 \qquad \forall (t, x) \in D$$

   donde en la doble implicación hemos usado que $e^t > 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5. Dada una función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1, se considera el cambio de variable

$$s = t + \phi(x), \quad y = x.$$

1. Prueba que $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t, x) = (s, y)$ es un difeomorfismo.

   El cambio de variable es:

$$\begin{array}{rccl} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2): & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (t, x) & \longmapsto & (s, y) = (t + \phi(x), x) \end{array}$$

En primer lugar, tenemos que φ es inyectiva por serlo φ_2. Veamos ahora que es sobreyectiva. Dado $(s,y) \in \mathbb{R}^2$, necesitamos encontrar $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(t,x) = (s,y)$. Definimos:

$$t = s - \phi(y) \qquad x = y$$

De forma directa se tiene que estos valores están bien definidos y que $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Comprobamos que $\varphi(t,x) = (s,y)$:

$$\begin{aligned}\varphi(t,x) &= (t + \phi(x), x) \\ &= (s - \phi(y) + \phi(y), y) \\ &= (s,y)\end{aligned}$$

Por tanto, φ es sobreyectiva. Por tanto, φ es biyectiva, con inversa:

$$\begin{array}{rccl}\varphi^{-1}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (s,y) & \longmapsto & (t,x) = (s - \phi(y), y)\end{array}$$

Además, tenemos que $\varphi, \varphi^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ por serlo las proyecciones, la suma, diferencia, composisión y la función ϕ. Por tanto, φ es un difeomorfismo del plano.

2. Encuentra una función ϕ en las condiciones anteriores que permita transformar la ecuación $x' = x$ en la ecuación

$$\frac{dy}{ds} = \frac{y}{1 + y\cos y}.$$

Describe los dominios sobre los que este cambio es admisible.

Supongamos que el cambio es admisible (más adelante veremos las condiciones que hay que imponer). Entonces, la ecuación transformada queda:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = x' \cdot \frac{1}{1 + \phi'(x)x}$$

Usando que $x' = x$, $x = y$ y la ecuación impuesta por el enunciado, obtenemos:

$$y' = \frac{y}{1 + y\phi'(y)} = \frac{y}{1 + y\cos y}$$

Por tanto, ϕ es una función tal que $\phi'(y) = \cos y$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo, como $\operatorname{sen} y$ es una primitiva de $\cos y$, tenemos que:

$$\begin{array}{rccl}\phi: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \operatorname{sen} y\end{array}$$

es una función válida, ya que $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ y cumple que la ecuación transformada usando el cambio de variable descrito es la ecuación dada.

Veamos ahora la condición de admisibilidad. Necesitamos que:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} f(t,x) \neq 0 \qquad \forall (t,x) \in D$$

siendo D el dominio en el que este cambio es admisible. En nuestro caso, tenemos:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 1 \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \varphi'(x) = \cos x \qquad f(t,x) = x$$

Por tanto, necesitamos que:

$$1 + x\cos x \neq 0 \qquad \forall (t,x) \in D$$

Por tanto, como sobre t no imponemos condiciones, tenemos que $D = \mathbb{R} \times D_X$, donde $D_X \subset \mathbb{R}$ es un abierto y conexo de forma que:

$$D_X \subset \{x \in \mathbb{R} \mid 1 + x\cos x \neq 0\}$$

La ecuación $1 + x\cos x = 0$ es una ecuación trascentendental cuyas soluciones no podemos encontrar, por lo que no podemos determinar el dominio de forma explícita. No obstante, para intuirlos, tenemos que:

$$1 + x\cos x = 0 \Longleftrightarrow \cos x = -\frac{1}{x}$$

Por tanto, como estas dos funciones sí sabemos graficarlas, las soluciones serán las abcisas de los puntos de corte de dichas dos gráficas, que se muestran en la Figura 1.

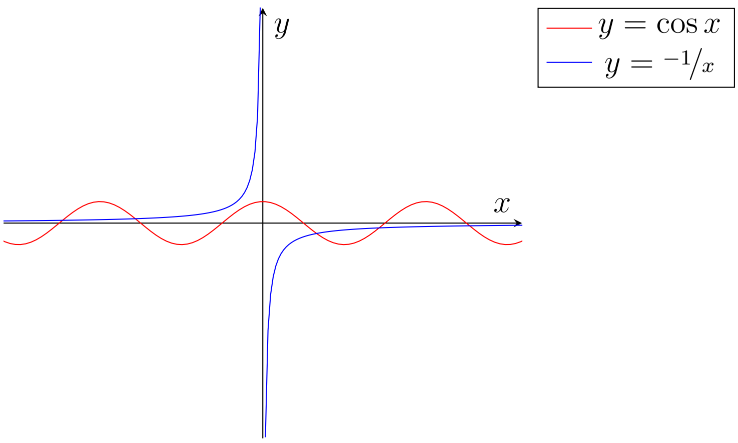


Figura 1: Gráficas de $y = {}^{-1}/_{x}$ y $y = \cos x$.

Viendo las gráficas, es fácil intuir que hay infinitas soluciones de $1+x\cos x = 0$. Notando cada uno de ellos como x_k para cada $n \in \mathbb{R}$ de forma que $x_k < x_{k+1}$, tenemos que los posibles dominios son:

$$D_k = \mathbb{R} \times \left]x_k, x_{k+1}\right[$$